Fonctions à plusieurs variables (Exercices proposés)

1/ Domaine de définition

Déterminer et représenter graphiquement les domaines d'existence des fonctions suivantes

a/ $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ b/ $f(x) = \ln(x^2+y)$ c/ $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$

2/ Calcul de limite

a/ Calculer les limites de $f(x,y)$ au point $(0,0)$

$f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $f(x,y) = \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2}$ $f(x,y) = \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}$ $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$

$f(x) = \dfrac{x}{x+y}$ $f(x,y) = \dfrac{2x^3+2y^3+x^3y^3}{x^2+y^2}$ $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^4+y^4}$ $f(x,y) = \dfrac{\sin\sqrt{xy}-\sqrt{xy}}{xy}$

b/ Calculer la limite de $f(x,y)$ en $(+\infty,+\infty)$: $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

3/ Etude de la continuité

Etudier la continuité de f au point $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})}{|x+y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(2x+y)(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^p y^q}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(Trouver une condition sur p et q pour que f soit continue en $(0,0)$)

4/ Différentiabilité, Classe C^1, Théorème de Schwartz

a/ $$\begin{cases} f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Que peut-on dire

b/ $$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{\ln(1+xy)-xy}{x^2+y^2+xy} & (x,y) \neq (0,0) \text{ et } |xy| < 1 \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

b1/ Démontrer que f est différentiable en $(0,0)$

b2/ Calculer sa différentielle en ce point

ETUDUP.com

c/ Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = |xy|^\alpha$ est différentiable en $(0,0)$ si $\alpha > 1/2$

d/ Montrer que la fonction $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ n'est pas différentiable en $(0,0)$

e/ $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1/ M.que f possede des derivées partielles au point $(0,0)$

2/ M.que f n'est pas continue en $(0,0)$

f/ $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

g/ $$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\frac{x^3+y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$

h/ $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1/ f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$

2/ Calculer les derivées partielles de f si elles existent

a/ au point $(x,y) \neq (0,0)$ b/ au point $(0,0)$

3/ f est-elle differentiable

a/ au point $(x,y) \neq (0,0)$ b/ au point $(0,0)$

5/ Matrice jacobienne

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y,z) \longrightarrow (x+y^2, xy^2z)$

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x,y) \longrightarrow (x^2+y, xy, e^y)$

a/ Determiner la matrice jacobienne de f et de g

b/ Determiner la matrice jacobienne de $g \circ f$ par 2 methodes

① En explicitant $g \circ f$ ② au moyen de produit de matrices

ETUDUP.com

6/ Etude des extremums

Déterminer les extremums de f si elles existent (Exercice proposé) Suite

a/ $f(x,y) = x^2+y^2-2ax-2by$

b/ $f(x,y) = |x-a|+|y-b|$

c/ $f(x,y) = x^3y - y^3x$

d/ $f(x,y) = y^4 - 6xy^2 + 5x^2$

e/ $f(x,y) = x^4+y^4+2(x-y)^2$

f/ $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$

g/ Déterminer les extremums de $f(x,y) = xy$ si (x,y) doit appartenir à l'ellipse : $4x^2+y^2 = 4$

7/ Théorème de la fonction implicite

$f(x,y) = y+x+1-e^{x-y}$

a/ Montrer qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de 0 vérifiant $\phi(0) = 0$ et $f(x, \phi(x)) = 0$

b/ Donner un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $\phi(x)$

c/ Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\phi(x)}{x^2}$

8/ Changement de coordonnées

a/ $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / \ u>0, \ v>0\}$ g de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$

On pose $\forall (x,y) \in \Omega$: $f(x,y) = g\left(xy, \dfrac{y}{x}\right)$

Déterminer g pour que f vérifie l'équation :

$$\forall (x,y) \in \Omega : \ x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

b/ F fonction de classe C^2 sur l'ouvert $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x>0\}$

f fonction définie sur $\Delta = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2, \ r>0, \ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$

par $f(r,\theta) = F(x,y)$

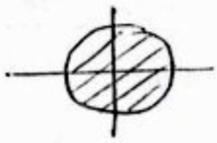
- On pose $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$ où $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \text{Arctan}\dfrac{y}{x}$

Calculer le Laplacien de F : $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ suivant la variable r et θ en fonction des dérivées partielles de f.

ETUDUP .com

Solutions

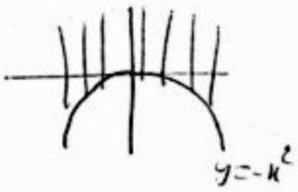
1/ a/ $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.



f est définie si $1-x^2-y^2 \geq 0$ càd $x^2+y^2 \leq 1$

D est le disque fermé de centre $O(0,0)$ et rayon $R=1$

b/ $f(x,y) = \ln(x^2+y)$



f est définie si $x^2+y > 0$ càd $y > -x^2$

D est la partie du plan au dessus de la parabole $y=-x^2$

c/ $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$

f est définie si $1-x^2 \geq 0$ et $1-y^2 \geq 0$ càd $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$

D est l'intérieur du carré d'extremités $(1,1)$ $(-1,1)$ $(1,-1)$ $(-1,-1)$

2/ a/ $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

si on pose $y = \lambda x$, $\lambda \neq 0$ alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-\lambda^2x^2}{x^2+\lambda^2x^2} = \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$

la limite dépend de λ donc elle n'existe pas.

b/ $f(x,y) = \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2}$

On a $|x+y|^2 = x^2+y^2+2xy \geq x^2+y^2$ pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$

alors $|x+y| \geq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2} \geq \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

or $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = +\infty$

c/ $f(x,y) = \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}$

On a $(|x|-|y|)^2 \geq 0$; $x^2+y^2-2|xy| \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2|xy|$

d'où $\dfrac{1}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2|xy|} \Rightarrow |f(x,y)| \leq \dfrac{|x^3y^3|}{2|xy|} = \dfrac{x^2y^2}{2}$

$\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(0,0)} f(x,y) = 0$

2° méthode On pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $r > 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$

$|f(x,y)| = \left|\dfrac{r^3\cos^3\theta \cdot r^3\sin^3\theta}{r^2}\right| = |r^4\cos^3\theta\sin^3\theta| \leq |r^4|$

or $\lim\limits_{r\to 0} r^4 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(0,0)} f(x,y) = 0$.

ETUDUP .com

2/ • $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$: $|\sin\frac{1}{xy}| \leq 1 \Rightarrow |f(x,y)| \leq (x^2+y^2)$

Or $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(0,0)} f(x,y) = 0$

• $f(x) = \frac{x}{x+y}$ Pour $y = \lambda x$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x+\lambda x} = \frac{1}{1+\lambda}$

la limite depend de λ donc elle n'existe pas

• $f(x,y) = \frac{2x^3+2y^3+x^3y^3}{x^2+y^2}$ On pose $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\theta \in [0, 2\pi[$, $r>0$

$|f(x,y)| = \left|\frac{2r^3\cos^3\theta + 2r^3\sin^3\theta + r^3\cos^3\theta \cdot r^3\sin^3\theta}{r^2}\right| = \left|\frac{r^3}{r^2}\left(2\cos^3\theta + 2\sin^3\theta + r^3\cos^3\theta\sin^3\theta\right)\right|$

$\leq r\,|2+2+r^3| = (2+r^3)\,r$ ($|\cos\theta| \leq 1$, $|\sin\theta| \leq 1$)

On $\lim\limits_{r\to 0}(2+r^3)\,r = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(0,0)} f(x,y) = 0$

• $f(x,y) = xy\,\frac{x^2-y^2}{x^4+y^4}$ On pose $y = \lambda x$ alors

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} x(\lambda x)\,\frac{x^2-\lambda^2x^2}{x^4+\lambda^4x^4} = \frac{\lambda(1-\lambda^2)}{1+\lambda^4}$

la limite depend de λ donc elle n'existe pas

• $f(x,y) = \frac{\sin\sqrt{xy} - \sqrt{xy}}{xy}$ Au voisinage de 0 : $\sin X = X - \frac{X^3}{6} + o(X^3)$

Alors $\sin\sqrt{xy} = \sqrt{xy} - \frac{xy\sqrt{xy}}{6} + o((\sqrt{xy})^3)$

d'où $f(x,y) = \frac{\sqrt{xy} - \frac{xy\sqrt{xy}}{6} + o((\sqrt{xy})^3) - \sqrt{xy}}{xy} = -\frac{1}{6}\sqrt{xy} + o(\sqrt{xy})$

et par suite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

b/ On pose $X = \frac{1}{x}$ et $Y = \frac{1}{y}$ Alors :

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}}{\frac{1}{X^2}+\frac{1}{Y^2}} = \lim\limits_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{X+Y}{XY}\cdot\frac{X^2Y^2}{X^2+Y^2} = \lim\limits_{(0,0)} \frac{XY(X+Y)}{X^2+Y^2}$

On pose $\begin{cases} X = r\cos\theta \\ Y = r\sin\theta \end{cases}$ alors $\lim\limits_{(0,0)} \left|\frac{XY(X+Y)}{X^2+Y^2}\right| = \left|\frac{r^2\cos\theta\sin\theta(r\cos\theta + r\sin\theta)}{r^2}\right| \leq r$

$\lim\limits_{r\to 0} r = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(X,Y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y) = 0$ ($|\cos\theta| \leq 1$; $|\sin\theta| \leq 1$)

ETUDUP.com

3/ Continuité de f en $(0,0)$

- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Si $y = x$ alors $\lim_{(0,0)} f(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^4+x^2} = \lim_{0} \frac{x}{x^2+1} = 0$

Si $y = x^2$ alors $\lim_{(0,0)} f(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}$

la limite dépend du chemin suivi par (x,y) dans un voisinage de $(0,0)$ donc elle n'existe pas et par suite f n'est pas continue en $(0,0)$

- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{|x+y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Au voisinage de $(0,0)$: $f(x,y) \sim \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x+y|}$ $\left(\ln(1+X) \underset{0}{\sim} X \right)$

et en posant $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\lim_{(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x+y|} = \lim_{r \to 0} \frac{r}{|r\cos\theta + r\sin\theta|} = \frac{1}{|\cos\theta + \sin\theta|}$

la limite dépend de θ, donc elle n'existe pas donc f n'est pas cont en $(0,0)$

- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

On pose $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$ alors

$|f(x,y)| = \left| \frac{4r\cos\theta \cdot r\sin\theta (r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)}{r^2} \right| = \left| \frac{4r^4 \cos\theta \cdot \sin\theta (\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r^2} \right| \leq 8r^2$

$\lim_{r \to 0} 8r^2 = 0 \Rightarrow \lim_{(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \Rightarrow f$ cont en $(0,0)$

- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(2x+y)(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

On pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$|f(x,y)| = \left| \frac{(2r\cos\theta + r\sin\theta)(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)}{r^2} \right| \leq 6r$

$\lim_{r \to 0} 6r = 0 \Rightarrow \lim_{(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \Rightarrow f$ cont en $(0,0)$

- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^p y^q}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ on pose $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$

$|f(x,y)| = \left| \frac{r^p \cos^p\theta \cdot r^q \sin^q\theta}{r^2} \right| = \left| (r^{p+q-2}) \cos^p\theta \sin^q\theta \right| \leq r^{p+q-2}$

$\lim_{r \to 0} r^{p+q-2} = 0 \Leftrightarrow p+q-2 > 0$ Ainsi $\lim_{(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

et f est cont en $(0,0)$

ETUDUP .com

4/ a/ $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $(x,y)\neq(0,0)$ $\quad f(0,0)=0$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim\limits_{(x\to 0)} \dfrac{f(x,y)-f(0,y)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0} y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -y$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(x,y)-f(x,0)}{y-0} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0}{y} = \lim\limits_{y\to 0} x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = x$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-0}{x} = 1$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{-y-0}{y} = -1$

En effet: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$

Remarque: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ donc D'après Th de Schwartz

l'une au moins de fonction $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$

b/ $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+xy)-xy}{x^2+y^2+xy}$ $(x,y)\neq(0,0)$ et $|xy|<1$; $f(0,0)=0$

b1/ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0-0}{x} = 0$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$

Alors si f est différentiable en $(0,0)$ alors $df_{(0,0)}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0).x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0).y = 0$

De plus $|\varepsilon(x,y)| = \left|\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-df_{(0,0)}(x,y)}{\|(x,y)\|}\right| = \left|\dfrac{\ln(1+xy)-xy}{(x^2+y^2+xy)\sqrt{x^2+y^2}}\right|$ $\quad$ Rappel $\ln(1+x) = x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$

$= \left|\dfrac{xy-\frac{x^2y^2}{2}+o(x^2y^2)-xy}{(x^2+y^2+xy)\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\dfrac{+x^2y^2}{2(x^2+y^2+xy)\sqrt{x^2+y^2}}\right|$

On pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $\quad |\varepsilon(x,y)| = \left|\dfrac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{2r^3(1+\cos\theta\sin\theta)}\right| \leq \dfrac{r}{2}\times 2 = r$

en effet: $\cos\theta.\sin\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2}$ et $-1\leq\sin 2\theta\leq 1$

donc $\dfrac{1}{2}\leq 1+\dfrac{\sin 2\theta}{2}\leq\dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\leq 1+\cos\theta\sin\theta\leq\dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{2}{3}\leq\dfrac{1}{1+\cos\theta\sin\theta}\leq 2$; $|\cos\theta|\leq 1, |\sin\theta|\leq 1$

$\lim\limits_{r\to 0} r = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(0,0)} \varepsilon(x,y) = 0$ donc f est différentiable en $(0,0)$

b2/ $df_{(0,0)}(x,y) = 0$

c/ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,y)}{x} = 0$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,y)}{y-0} = 0$

ETUDUP.com

Si f est différentiable en $(0,0)$ alors $df_{(0,0)}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).y = 0$

De plus $\varepsilon(x,y) = \dfrac{f(x,y) - f(0,0) - df_{(0,0)}(x,y)}{\|(x,y)\|} = \dfrac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}$

On pose $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ alors $\varepsilon(x,y) = \dfrac{|r\cos\theta . r\sin\theta|^\alpha}{r} \leq r^{2\alpha-1}$

Si $\alpha > 1/2$ alors $2\alpha - 1 > 0$ et $\lim\limits_{r\to 0} r^{2\alpha-1} = 0 \Rightarrow \lim \varepsilon(x,y) = 0$

Ainsi f est différentiable en $(0,0)$

d/ $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$

Si f est différentiable en $(0,0)$ alors $df_{(0,0)}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).y = 0$

et on a $\varepsilon(x,y) = \dfrac{f(x,y) - f(0,0) - df_{(0,0)}(x,y)}{\|(x,y)\|} = \dfrac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}}$

pour $y = x$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\frac{x^2}{x^2+x^2}} = \sqrt{1/2}$

pour $y = x^2$ $\lim\limits_{(0,0)} \varepsilon(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\frac{x^3}{x^2+x^4}} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\frac{x}{1+x^2}} = 0$

la limite dépend du chemin parcouru par (x,y) dans $V(0,0)$

donc elle n'existe pas d'où f n'est pas différentiable en $(0,0)$

e/ $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ $(x,y) \neq (0,0)$ $\quad f(0,0) = 0$

1/ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$

2/ Pour $y = \lambda x$ $\lim\limits_{(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x(\lambda x)}{x^2+\lambda^2 x^2} = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$

la limite dépend de λ donc elle n'existe pas

f/ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow f$ admet des dérivées partielles continues sur $\mathbb{R}^2$

* les 2 fonctions $(x,y) \longrightarrow xy(x^2-y^2)$ et $(x,y) \longrightarrow x^2+y^2$ admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et on a: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$

et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-xy^4 - 4x^3y^2 + x^5}{(x^2+y^2)^2}$

ETUDUP.com

* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$

Donc f admet des derivés partielle en tout point de $\mathbb{R}^2$

* les 3 fonctions $(x,y) \longrightarrow x^4y + 4x^2y^3 - y^5$ $(x,y) \longrightarrow -xy^4 - 4x^3y^2 + x^5$, $(x,y) \longrightarrow (x^2+y^2)^2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ donc de même $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

* Continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$

On pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ alors

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{r^4\cos^4\theta \cdot r\sin\theta + 4r^2\cos^2\theta \cdot r^3\sin^3\theta - r^5\sin^5\theta}{(r^2)^2}\right| \leq r\left(|\cos^4\theta\sin\theta| + 4|\cos^2\theta\sin^3\theta| + |\sin^5\theta|\right) = 6r$$

$\lim_{r\to 0} 6r = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ est cont en $(0,0)$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \frac{|-r\cos\theta r^4\sin^4\theta - 4r^3\cos^3\theta \cdot r^2\sin^2\theta + r^5\cos^4\theta)|}{(r^2)^2} \leq r\left(|\cos\theta\sin^4\theta + 4\cos^3\theta \cdot \sin^2\theta + \cos^4\theta|\right) \leq 6r$$

de même $\lim \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}$ est cont en $(0,0)$. Enfin f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

g/ Rappel : f est de C^2 sur $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow f$ admet 4 derivés partielle seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$ et sont continus sur $\mathbb{R}^2$

h/ $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f / on a 2 fcts $(x,y) \xrightarrow{f_1} xy$ et $(x,y) \xrightarrow{f_2} \sqrt{x^2+y^2}$ sont continus sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ $\sqrt{x^2+y^2} \neq 0$ donc $f = \frac{f_1}{f_2}$ est cont sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

. Continuité en $(0,0)$

on pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$

$$|f(x,y)| = \left|\frac{r\cos\theta \cdot r\sin\theta}{r}\right| = r|\cos\theta||\sin\theta| \leq r$$

$\lim_{r\to 0} r = 0 \Rightarrow \lim_{(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \Rightarrow f$ est cont en $(0,0)$

2/ a/ Pour $(x,y) \neq (0,0)$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

b/ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$

ETUDUP .com

3/ a/ les 3 fcts $(x,y) \to x^3$ $(x,y \to y^3$ et $(x,y) \to (x^2+y^2)^{3/2}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont cont sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

donc f est differentiable au tout point $(x,y) \neq (0,0)$

b/ Differentiabilité en $(0,0)$

si f est differentiable en $(0,0)$ alors $df_{(0,0)}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).y = 0$

De plus $\varepsilon(x,y) = \dfrac{f(x,y) - f(0,0) - df_{(0,0)}(x,y)}{\|(x,y)\|} = \dfrac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Pour $y = x$ $\lim\limits_{(0,0)} \varepsilon(x,y) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x^2+x^2} = 1/2$

Pour $y = x^2$ $\lim\limits_{(0,0)} \varepsilon(x,y) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^2+x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$

donc $\lim\limits_{(0,0)} \varepsilon(x,y)$ n'existe pas $\Rightarrow$ f n'est pas differentiable en $(0,0)$

5/ $f(x,y,z) = (x+y^2, xy^2z) = (f_1, f_2)$ $g(x,y) = (x^2+y, xy, e^y) = (g_1, g_2, g_3)$

a/ $J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ y^2z & 2xyz & xy^2 \end{pmatrix}$

$Jg(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ y & x \\ 0 & e^y \end{pmatrix}$

b/ ① $(gof)(x,y,z) = g(f(x,y,z)) = g(x+y^2, xy^2z) = ((x+y^2)^2 + xy^2z, (x+y^2)xy^2z, e^{xy^2z})$

$= (x^2 + 2xy^2 + y^4 + xy^2z, x^2y^2z + xy^4z, e^{xy^2z}) = (gof_1, gof_2, gof_3)$

$J_{gof}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial gof_1}{\partial x} & \frac{\partial gof_1}{\partial y} & \frac{\partial gof_1}{\partial z} \\ \frac{\partial gof_2}{\partial x} & \frac{\partial gof_2}{\partial y} & \frac{\partial gof_2}{\partial z} \\ \frac{\partial gof_3}{\partial x} & \frac{\partial gof_3}{\partial y} & \frac{\partial gof_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$

② on a $d(gof)(x,y,z) = dg(f(x,y,z)) \circ df(x,y,z)$ d'où $J_{gof}(x,y,z) = J_g(f(x,y,z)) \times J_f(x,y,z)$

$J_{gof}(x,y,z) = J_g(x+y^2, xy^2z) \times J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+2y^2 & 1 \\ xy^2z & x+y^2z \\ 0 & e^{xy^2z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ y^2z & 2xyz & xy^2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2x+2y^2+y^2z & 4xy+4y^3+2xyz & xy^2 \\ xy^2z+xy^2z+y^4z & 2xy^3z + 2x^2yz + 2xy^3z & x^2y^2 + xy^4 \\ 3e^{xy^2z} & 2xyz\, e^{xy^2z} & xy^2 e^{xy^2z} \end{pmatrix}$.

ETUDUP.com

6/ a/ $f(x,y) = x^2+y^2-2ax-2by$

- $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2a=0 \\ 2y-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$

- $r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$, $s=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0$, $t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$

$rt-s^2=4>0$ et $r=2>0 \Rightarrow f$ admet un minimum en (a,b)

Autre methode: $f(x,y)=(x-a)^2-a^2+(y-b)^2-b^2=(x-a)^2+(y-b)^2-a^2-b^2$

Ona $(x-a)^2 \geq 0$ et $(y-b)^2 \geq 0 \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 \geq 0 \Rightarrow f(x,y) \geq -a^2-b^2$

d'où $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x,y) \geq f(a,b) \Rightarrow f(a,b)=-a^2-b^2$ est un minimum

b/ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$: $|x-a| \geq 0$ et $|y-b| \geq 0 \Rightarrow |x-a|+|y-b| \geq 0$

$\Rightarrow f(x,y) \geq f(a,b)$

$\Rightarrow f$ admet un minimum en (a,b) de valeur 0

c/ $f(x,y)=x^3y-y^3x$

Conditions necessaire : $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(3x^2-y^2)=0 \\ x(x^2-3y^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \text{ ou } 3x^2-y^2=0 \\ x=0 \text{ ou } x^2-3y^2=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y=0 \\ x^2-3y^2=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 3x^2-y^2=0 \\ x=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 3x^2-y^2=0 \\ x^2-3y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$

Le seul point critique est $(0,0)$

Condition suffisante: $r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=(6xy)_{(0,0)}=0$ $\quad s=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(0,0)}=(3x^2-3y^2)_{(0,0)}=0$

$t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=(-6xy)_{(0,0)}=0$ d'où $rt-s^2=0$ on ne peut conclure alors on revient à la definition de l'extremum

Soit x_0 voisin de 0 $(x_0 \neq 0)$

Ona $f(x_0, \frac{x_0}{2})=x_0^3 \cdot \frac{x_0}{2}-\left(\frac{x_0}{2}\right)^3 \cdot x_0=\frac{x_0^4}{2}-\frac{x_0^4}{8}=\frac{3x_0^4}{8}>0$.

d'où $f(x_0, \frac{x_0}{2}) > f(0,0)$ c.a.d $f(0,0)$ n'est pas un maximum

et $f(\frac{x_0}{2}, x_0)=-\frac{3x_0^4}{8} \leq 0 \Rightarrow f(\frac{x_0}{2}, x_0) \leq f(0,0)$ c.a.d f n'est pas un minimum

ETUDIP.com

d/ $f(x,y) = y^4 - 6xy^2 + 5x^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -6y^2 + 10x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 12yx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y^2 + 5x = 0 & (1) \\ y^3 - 3xy = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $x = \frac{3y^2}{5}$; (2) : $y^3 - 3\left(\frac{3y^2}{5}\right)y = 0 \Leftrightarrow -\frac{4y^3}{5} = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$

le seul point critique est $(0,0)$

$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10$ $\quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (-12y)_{(0,0)} = 0$; $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (12y - 12x)_{(0,0)} = 0$

$rt - s^2 = 0 \Rightarrow$ Cas douteux $\Rightarrow$ on revient à la définition de l'extremum

• Soit x_0 voisin de 0 avec $x_0 \neq 0$

on a $f(0,x_0) = 5x_0^2 > 0 \Rightarrow f(0,x_0) > f(0,0)$

$\Rightarrow f(0,0)$ n'est pas un maximum

et $f(x_0^2, 2x_0) = 16x_0^4 - 6x_0^2 \times 4x_0^2 + 5x_0^4 = -3x_0^4 < 0$;

$\Rightarrow f(x_0^2, 2x_0) < f(0,0) \Rightarrow f(0,0)$ n'est pas 1 minimum

e/ $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 4(x-y)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4(x-y)$ $\quad \begin{cases} 4x^3 + 4(x-y) = 0 & (1) \\ 4y^3 - 4(x-y) = 0 & (2) \end{cases}$ $\quad (1)+(2) \Rightarrow y^3 = -x^3 \Rightarrow y = -x$

(1) $\Rightarrow 4x(x^2+2) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$

le seul point critique est $(0,0)$

On remarque que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $x^4 \geq 0$, $y^4 \geq 0$ et $(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$

donc f admet un minimum en $(0,0)$

f/ $\frac{\partial f}{\partial x} = 4y - 4x^3$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 4y^3$ $\quad \begin{cases} 4y - 4x^3 = 0 \\ 4x - 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x = y^3 \end{cases} \Rightarrow x = x^6 \Rightarrow x(1-x^5) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$

Les points critiques sont : $(0,0)$ et $(1,1)$

• $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12x^2$ $\quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$ $\quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y^2$

Au point $(0,0)$: $r = 0$, $s = 4$, $t = 0$; $rt - s^2 = -16 < 0$, f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$

Au point $(1,1)$: $r = -12$, $s = 4$, $t = -12$, $rt - s^2 = 128 > 0$ et $r < 0$; f admet 1 maximum en $(1,1)$

g/ 1°méthode : $4x^2 + y^2 = 4$; $y^2 = 4 - 4x^2$; $y = \pm\sqrt{4-4x^2}$ d'où $f(x,y) = xy = 4\varepsilon x\sqrt{1-x^2}$ $\quad \varepsilon = \pm 1$

On étudie les extremums de la fct $g(x) = 4\varepsilon x\sqrt{1-x^2}$ (fonction à 1 seul variable)

$g'(x) = 4\varepsilon(1-2x^2)/\sqrt{1-x^2}$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$

$\varepsilon = 1 \Rightarrow g$ admet min en $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$ et $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$

$\varepsilon = -1 \Rightarrow g$ admet max en $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$ et $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$

donc $\varepsilon = 1$; f admet max en $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$ et $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$ et min en $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$

2°méthode : $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(4x^2 + y^2 - 4)$ fonction de Lagrange

$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y + 8\lambda x = 0 & (1) \\ x + 2\lambda y = 0 & (2) \\ 4x^2 + y^2 - 4 = 0 & (3) \end{cases}$ $\quad (1)$ et $(2) \Rightarrow \lambda = -\frac{y}{8x}$ et $\lambda = \frac{-x}{2y}$ $\Rightarrow \frac{-y}{8x} = \frac{-x}{2y} \Rightarrow y^2 = 4x^2$

(3) $\Rightarrow x = \pm\sqrt{2}/2$ et $y = \pm\sqrt{2}$

$f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}) = 1$ maximum et $f(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}) = f(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}) = -1$ minimum

ETUDIP .com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Electricité
Physique
Résumés
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Analyse
Diapo
Livres
Exercices
Mécanique
Contrôles Continus
Langues
MTU
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..